UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2018
Session Normale
Epreuve du 2ème tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

La concentration y en (g/l) de micro-organismes dans une culture varie en fonction du temps t en heures, $t \geqslant 0$ et vérifie la relation $y' + \frac{2}{3}y = 2e^{\frac{1}{3}t}$. (1)

1) Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{2}{3}y = 0$. (2) (0,5 point)

2) On pose $f(t) = ke^{\frac{t}{3}}$ où k est un nombre réel. Déterminer le réel k pour que la fonction $f : t \longrightarrow ke^{\frac{t}{3}}$ soit solution de l'équation différentielle (1). (1 point)

3) a) Montrer qu'une fonction y est solution de l'équation différentielle (1) si et seulement si $y - f$ est solution de l'équation différentielle (2). (1 point).

b) En déduire la forme générale de la solution y de l'équation différentielle (1). (0,5 point)

c) Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une concentration initiale de 3,25 g/l. (1 point)

Exercice 2 (4 points)

I) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme :
$P(z) = z^3 + (1+2i)z^2 - (1-14i)z - 13$.

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_o que l'on précisera. (0,5 point)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. (0,75 point)

II) Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $f(z) = \frac{iz}{z+i}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et M d'affixes respectives $-i$; $2-3i$; $-3+2i$ et z.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. (1 point)

2) Montrer que les points A, B et C sont alignés. (0,25 point)

3) Donner une interprétation géométrique de $|f(z) - i|$ et $\arg[f(z) - i]$. (0,5 point)

4) a) Déterminer et construire l'ensemble $(\wedge)$ des points M d'affixes z vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$. (0,5 point)

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z vérifiant $arg\,[f(z) - i] = \frac{\pi}{4}$. (0,5 point)

Problème (12 points)

Partie A (2,5 points)

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$ où ln désigne le logarithme néperien.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. (0,5 point)

2) a) Calculer $g'(x)$, étudier son signe puis donner le sens de variation de g. (1 point)
b) Dresser le tableau de variation de g. (0,5 point)

3) Déduire de l'étude de g le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (0,5 point)
(On pourra calculer g (1)).

Partie B (6 points)

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{x-1} - 1 \text{ si } x < 1 \\ f(x) = (x-1)\ln x \text{ si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

On désigne par (Γ) la courbe réprésentative de f.

1) Etudier la continuité de f en 1. (0,5 point)

2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus. (1,25 point).

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter le résultat. (0,5 point)
b) Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis donner le sens de variation de f. (1,5 point)
c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 point)

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,75 point)
b) Construire la courbe (Γ) de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). (1 point)

Partie C (2 points)

1) En effectuant une intégration par parties, déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. (1 point)

2) Soit α un réel négatif.
a) Déterminer en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 1$ et $y = -1$. (0,5 point)
b) Déterminer la limite de cette aire lorsque α tend vers $-\infty$. (0,5 point)

Partie D (1,5 point)

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera. (0,5 point)

2) On désigne par (Γ') la courbe de f^{-1} bijection réciproque de f. Construire en justifiant (Γ') dans le même repère que (Γ). (1 point)

On donne $\frac{1}{e} \simeq 0.4$.

Fin