UNIVERSITE OUAGA I
Pr Joseph KI-ZERBO
Office du Baccalauréat

Séries F1-F2-F3-F4

Année 2017
Session Normale
Epreuve du 1er tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $9y''+y=0$.

1) a) Déterminer la solution générale de l'équation (E). (0,5 point)
b) En déduire la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0)=2$ et $f'(0)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (1 point)

2) a) Montrer qu'il existe un réel a strictement positif et un réel $b \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos\left(\frac{1}{3}x+b\right)$. (1 point)
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=2\sqrt{3}$. (1 point)

3) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. (0,5 point)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 4 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2+2z+1=0$. (1 point)

2) Soit le nombre complexe $\alpha = \dfrac{-1+i}{2}$.
a) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes α^2 et α^3. (0,5 point)
b) Placer dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives α, α^2 et α^3. (0,5 point)

3) On pose $Z = \dfrac{\alpha^2-\alpha^3}{\alpha-\alpha^3}$
a) Ecrire Z sous forme algébrique. (0,5 point)
b) Déterminer le module et un argument de Z. (0,5 point)
c) En déduire la nature du triangle ABC. (0,5 point)

4) a) Déterminer l'affixe du point D, image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. (0,25 point)
b) Déterminer l'affixe du point E, image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. (0,25 point)

Problème (12 points)

Partie A (4 points)

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + 2\ln x$.

1) a) Déterminer la limite de g en 0^+ et en $+\infty$. (1 point)

b) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation. (1,5 point)

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$. Vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$. (1 point)

3) Déduire de ce qui précède que : pour tout $x \in]0;\alpha]$, $g(x) \leqslant 0$ et pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$. (0,5 point)

Partie B (8 points)

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{x}{2}} + 2x(\ln(x) - 1) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2 cm

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,5 point)

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. (1 point)

2) a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier. (1 point)

b) Interpréter graphiquement la limite précédente. (0,5 point)

3) a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$. (0,5 point)

b) En déduire le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation. (1 point)

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2. (0,5 point)

4) Construire la courbe (C) et la tangente (T). (1 point)

5) a) Montrer que la fonction F telle que $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} + x^2 \ln x - \dfrac{3}{2}x^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$. (1 point)

b) En déduire l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = 2$. (1 point)

On donne : $\alpha \simeq 0,75$; $f(\alpha) \simeq -0,5$

$\ln 2 \simeq 0,69$; $\ln(0,7) \simeq -0,36$; $\ln(0,8) \simeq -0,22$

$e^{0,25} \simeq 1,28$; $e^{0,35} \simeq 1,42$; $e^{0,4} \simeq 1,49$; $e \simeq 2,72$

$(C) \cap (O_x) = \{(0,2;0);(1,3;0)\}$

Fin